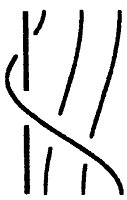
数理解析研究所講究録
1497巻 2006年 71-78

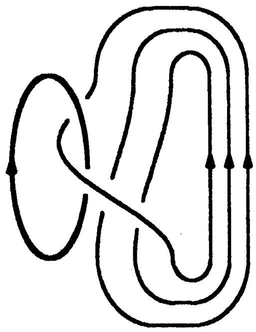
The Fourier transforms determine the Markov traces.

上智大学・理工学部・数学科　五味 靖 (GOMI, Yasushi)
Department of Mathematics, Sophia University

1　はじめに

OcneanuはA型岩堀-Hecke環上にMarkovトレースと呼ばれるトレース関数を構成し,それを用いてJones[7]は結び目の不変量を与えた．この理論はGeck-Lambropoulou[3]によってB型の場合に拡張された．B型組ひも群の元は下図のように,1本の固定された柱がある中の組ひもとして表され,対応する結び目は3次元空間から固定されたトーラスを取り除いた空間における結び目 (mixed link) となる．[3]ではB型岩堀-Hecke環上に,Markovトレースを構成し,それを用いてB型結び目の不変量を与えた．





$$\begin{tikzcd}
\text{B型組みひも群} \arrow[r, shift left, "\text{閉包}"] \arrow[d] & \{\text{B型結び目}\} \arrow[l, shift left, "\text{Alexanderの定理}"] \arrow[d, "\text{4変数の不変量}"] \\
\text{B型岩堀-Hecke環 (2パラメータ)} \arrow[r, "\text{B型Markovトレース (2パラメータ)}"'] & R
\end{tikzcd}$$

ここでは, 結び目の不変量のようなトポロジー的な背景はひとまず置いておいて, Markov トレースの代数的な性質を取り出して, それを拡張する形で一般の型の岩堀-Hecke 環上に Markov トレースを構成したい.

2 Markov トレース

$\mathcal{H}(A_n)$ を環 R 上の A_n 型岩堀-Hecke 環とする. $\mathcal{H}(A_n)$ は $\{T_i | \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ を生成元とし, 組ひも関係式と, ある可逆元 $q \in R$ に対して $(T_i - q)(T_i + 1) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ をみたしているとする. このとき, 部分環の無限列 $\mathcal{H}(A_1) \subset \mathcal{H}(A_2) \subset \cdots \subset \mathcal{H}(A_n) \subset \cdots$ が自然に得られる. Ocneanu は $\mathcal{H}(A_n)$ 上に Markov トレースと呼ばれる次のようなトレース関数を構成した. ここで $\tau : \mathcal{H}(A_n) \to R$ がトレース関数であるとは, 線型であって, $\tau(hh') = \tau(h'h)$, $\forall h, \forall h' \in \mathcal{H}(A_n)$ をみたすことである.

定理 2.1. $z \in R$ に対して, 次をみたすトレース関数 $\tau^{A_n} : \mathcal{H}(A_n) \to R$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が一意的に存在する.

(i) $\tau^{A_n}(1) = 1$.

(ii) $\tau^{A_n}|_{\mathcal{H}(A_{n-1})} = \tau^{A_{n-1}}$.

(iii) $\tau^{A_n}(hT_n) = z\tau^{A_n}(h), \quad \forall h \in \mathcal{H}(A_{n-1})$.

次に B 型の Markov トレースを見てみよう. $\mathcal{H}(B_n)$ を B_n 型岩堀-Hecke 環とする. $\mathcal{H}(B_n)$ は $\{T_i | \ i = 0, 1, \ldots, n-1\}$ を生成元とし, B_n 型の組ひも関係式と, 2 つの可逆元 $q, Q \in R$ に対して $(T_0 - Q)(T_0 + 1) = 0$, $(T_i - q)(T_i + 1) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ をみたす. A 型のときと同様に部分環の無限列 $\mathcal{H}(B_1) \subset \mathcal{H}(B_2) \subset \cdots \subset \mathcal{H}(B_n) \subset \cdots$ が自然に得られる. また, 部分環として $\mathcal{H}(A_{n-1}) \subset \mathcal{H}(B_n)$ となる. Geck, Lambropoulou [3] は $\mathcal{H}(B_n)$ 上に次のようなトレース関数を構成し, Markov トレースと呼んだ.

定理 2.2. $y, z \in R$ に対して, 次をみたすトレース関数 $\tau^{B_n} : \mathcal{H}(B_n) \to R$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が一意的に存在する.

(i) $\tau^{B_n}(1) = 1$.

(ii) $\tau^{B_n}|_{\mathcal{H}(B_{n-1})} = \tau^{B_{n-1}}$.

(iii) $\tau^{B_n}(hT_{n-1}) = z\tau^{B_n}(h), \quad \forall h \in \mathcal{H}(B_{n-1})$.

(iv) $\tau^{B_n}(hT'_{n-1}) = y\tau^{B_n}(h), \quad \forall h \in \mathcal{H}(B_{n-1})$.

ただし, $T'_i = T_i T_{i-1} \cdots T_1 T_0 T_1^{-1} \cdots T_{i-1}^{-1} T_i^{-1}$ $(0 \leq i \leq n-1)$.

A 型, B 型の Markov トレースの構成において, 定理の (3) の条件が特徴的である. この条件は, A 型や B 型が無限系列であるからこそ与えられるような条件である. このままでは一般の型の Markov トレースの構成を考えることは難しい. そこで, 部分環の列を 1 つ固定して Markov トレースを構成するという考え方ではなく, 任意の部分列に対して定理の (3) の性質を持つものを Markov トレースと呼ぶという考え方に変えてみる. 具体的には次の通りである.

(W,S) を有限 Coxeter 系とし, $\mathcal{H}_S$ を環 R 上の対応する岩堀-Hecke 環とする. 生成元は $\{T_s \mid s\in S\}$ で $(T_s-q_s)(T_s+1)=0$ $(s\in S)$ と組ひも関係式を満たしているとする. ここで q_s は R の可逆元とする. $I\subset S$ に対して, $\mathcal{H}_I$ を部分 Coxeter 系 (W_I,I) に対応する岩堀-Hecke 環とすると, $\mathcal{H}_I$ は自然に $\mathcal{H}_S$ の部分環となる. そこで次のように一般の型の Markov トレースを定義する.

定義 2.3. $\{z_s\in k \mid s\in S\}$ を固定する. トレース関数 $\tau:\mathcal{H}_S\to R$ が次をみたすとき, τ を *Markov* トレースと呼ぶ.

(M1) $\tau(1)=1$.

(M2) $\tau(hT_s)=z_s\tau(h),\ \forall s\in S,\ \forall h\in\mathcal{H}_{S\setminus\{s\}}$.

この *2* つの条件を *Markov* 条件と呼ぶことにする.

Markov 条件は (B 型の場合は (4) の条件があるから一概には言えないが), $s\in S$ の取り方を固定しないという点で, オリジナルの条件よりも強い条件である. しかし, [7], [3] の中で構成された Markov トレースも確かに Markov 条件を満たしていることが確かめられる. そのようなわけで, この条件によって一般の Markov トレースを定義しても妥当であろう. A 型の場合, この Markov 条件によってトレース関数が唯一に定まるが, 一般的には唯一に定まらない.

例えば τ が $\mathcal{H}_S$ の 1 次指標であれば, $z_s=\tau(T_s)$ に対して τ は Markov トレースとなる. また, $\mathcal{H}_S$ 上の標準対称化トレース関数 τ_0 は, $\tau_0(T_w)=\delta_{1w},\forall w\in W$ によって定められるが, この τ_0 は $z_s=0$ $(s\in S)$ に対して Markov 条件を満たしている. つまり, 一般の Markov トレースは特殊化として 1 次指標や標準対称化トレース関数を持っているわけである.

以下, $\mathcal{H}_S$ のパラメータは 1 つで $q_s=q$ $(s\in S)$ とし, $\mathcal{H}_S$ の基礎体 k を $\mathcal{H}_S$ が分裂半単純になるようにとる. $\mathcal{H}_S$ と W の既約指標の間には自然な全単射 $\mathrm{Irr}\mathcal{H}_S\leftrightarrow\mathrm{Irr}W$ $(\chi_q\leftrightarrow\chi)$ が存在する. このとき標準対称化トレース τ_0 は $\mathcal{H}_S$ の既約指標の一次結合として

$$\tau_0=\frac{1}{P_W}\sum_{\chi_q\in\mathrm{Irr}\mathcal{H}_s}Gdeg_{\chi_q}\cdot\chi_q$$

と表される. ここで, $P_W=\sum_{w\in W}q^{l(w)}$ は W の Poincaré 多項式で, $Gdeg_{\chi_q}$ は χ_q の generic 次数と呼ばれるものである. 次に, generic 次数と深い関係にある fake 次数について説明する.

3 Koszul複体

V を W の鏡映表現を与える $\mathbb{C}$ 上 n 次元ベクトル空間とする．この節においては W をコクセター群とは限らず，複素鏡映群としても構わない．$S = \oplus_{i\geq 0} S_i$ を V の対称代数，$L = \oplus_{j=0}^{n} L_j$ を V の外積代数とすると，S, L の各斉次成分へ W の作用が自然に拡張される．このとき $S^W := \{x \in S \mid wx = x,\ \forall w \in W\}$ は多項式環となり，適当な斉次元 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset S$ を用いて，$S^W = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ と表される．このとき $\{d_i := \deg(x_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ は $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ の取り方によらず一意的に定まり，W の次数と呼ばれる．前節で定義した W の Poincaré 多項式は $P_W = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{1-q^{d_i}}{1-q}$ と表されることが知られている．複素鏡映群の場合，Poincaré 多項式と言ったら，この式で定義するものとする．不定元 q, r を用いて W 上の類関数 $\mathrm{Tr}_{S\otimes L}$ を

$$\mathrm{Tr}_{S\otimes L}(w) := \sum_{i\geq 0} \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Tr}_{S_i\otimes L_j}(w) r^j q^i = \frac{\det_V(1+rw)}{\det_V(1-qw)}, \quad w \in W$$

と定める．$\chi \in \mathrm{Irr}W$ の $\mathrm{Tr}_{S\otimes L}$ における重複度を

$$\begin{aligned} P_\chi(q,r) &:= \langle \mathrm{Tr}_{S\otimes L}, \chi \rangle \\ &= |W|^{-1} \sum_{w\in W} \frac{\chi(w^{-1}) \det_V(1+rw)}{\det_V(1-qw)} \end{aligned}$$

とおき，$S\otimes L$ における χ の Molien 級数と呼ぶ．$S\otimes L$ は Koszul 複体と呼ばれる複体としての構造を持ち，Solomon[11] はそれを利用して，χ が自明指標 χ_1 のときに

$$P_{\chi_1}(q,r) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1+rq^{d_i-1}}{1-q^{d_i}} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+rq^{d_i-1})}{(1-q)^n P_W}$$

が成り立つことを示した．一般の $P_\chi(q,r)$ は行者-西山-志村 [5] で具体的に求められている．例えば，A_{n-1} 型の場合，既約指標を $\mathrm{Irr}W = \{\chi^\alpha \mid \alpha \vdash n\}$ と通常のように n の分割によってパラメトライズすると，Molien 級数は

$$P_{\chi^\alpha}(q,r) = q^{n(\alpha)} \prod_{x\in\alpha} \frac{1+rq^{c(x)}}{1-q^{h(x)}}$$

と表される．ここで，$n(\alpha) = \sum_{i=1}^{l}(i-1)\alpha_i$ (ただし $\alpha = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_l)$ とする)．また，α を Young 図形 $\{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq \alpha_i\}$ と同一視して，$x = (i,j) \in \alpha$ に対し，$h(x) = \alpha_i + \alpha'_j - i - j + 1$ (ただし α' は α の双対分割)，$c(x) = j - i$ と定められる．

B 型の場合，既約指標を

$$\mathrm{Irr}W_n = \{\chi^{(\alpha,\beta)} \mid |\alpha| + |\beta| = n\}$$

と通常のように2つの分割の組でパラメトライズすると，Molien級数は

$$P_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(q,r) = q^{2n(\alpha)+2n(\beta)+|\beta|} \prod_{x\in\alpha} \frac{1+rq^{2c(x)+1}}{1-q^{2h(x)}} \prod_{x\in\beta} \frac{1+rq^{2c(x)-1}}{1-q^{2h(x)}}$$

と表される．

今，不定元の r を $r=0$ と特殊化すると，$P_\chi(q,0)$ は S における χ の通常の Molien 級数で，$Fdeg_\chi := (1-q)^n P_W P_\chi(q,0)$ は χ の fake 次数と呼ばれる．A 型の場合，fake 次数 $Fdeg_\chi$ と generic 次数 $Gdeg_{\chi_q}$ とは全ての χ で一致する．一般の場合は次の節に述べる Lusztig の構成した Fourier 変換によって，fake 次数と generic 次数が移りあっていることが知られている．

4 Fourier 変換

Lusztig は有限簡約代数群の表現論の中で，巾単概指標と呼ばれる類関数を構成した．巾単概指標が生成する類関数の空間と巾単指標が生成する類関数の空間は一致し，どちらもその空間の正規直交基底をなす．巾単概指標と巾単指標の間の変換公式がいわゆる（非可換）Fourier 変換である（[9] 参照）．generic 次数，fake 次数はそれぞれ，巾単指標，巾単概指標の次数として現れ，$\chi, \chi' \in \mathrm{Irr}W$ に対応する Fourier 変換の係数 $\{\chi,\chi'\}$ を用いると，

$$Gdeg_{\chi_q} = \sum_{\chi'\in\mathrm{Irr}W} \{\chi,\chi'\} Fdeg_{\chi'} \tag{4.1}$$

が成り立つことがわかる．実は，$\mathrm{Irr}W$ はファミリーと呼ばれる部分集合達に直和分解されていて，各ファミリーごとに (4.1) のような変換が与えられる．例えば A 型の場合，全てのファミリーは唯一つの既約指標からなり，Fourier 変換が自明な変換となって，巾単指標と巾単概指標が全て一致する．つまり，generic 次数と fake 次数が一致するわけである．他の型の場合には，複数の既約指標を含むファミリーが必ずあり，Fourier 変換が恒等変換となることはない．

W が Weyl 群でなく対応する代数群が存在しない H_3, H_4 型や2面体群の場合にも，組み合せ論的な性質によって Fourier 変換は構成され，等式 (4.1) が成り立つ．この Fourier 変換を用いて Markov 条件をみたすトレース関数を次のように定めることが出来る．

定理 4.1. $\chi \in \mathrm{Irr}W$ に対して，

$$w^\chi := \left(\frac{1-q}{1+r}\right)^n \sum_{\chi'\in\mathrm{Irr}W} \{\chi,\chi'\} P_{\chi'}(q,r)$$

とおき，$\mathcal{H}_S$ 上のトレース関数を $\tau := \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}W} w^\chi \chi_q$ と定める．

(i) τ は $z_s = \dfrac{(q-1)r}{1+r}$ $(s \in S)$ に対して *Markov* 条件をみたす. つまり $z = \dfrac{(q-1)r}{1+r}$ に対して次が成り立つ.

(M1) $\tau(1) = 1$.

(M2) $\tau(hT_s) = z\tau(h),\ \forall s \in S,\ \forall h \in \mathcal{H}_{S\setminus\{s\}}$.

(ii) $I \subset S$ に対して $\mathcal{H}_I$ 上のトレース関数 τ_I を上と同様に定めると $\tau|_{\mathcal{H}_I} = \tau_I$ が成り立つ.

A 型以外では Markov 条件 (M1), (M2) のみからはトレース関数は一意的に定まらない. この定理の中のトレース関数 τ は, 型によらずに定義されているので, Markov トレースの中でも特に標準的な物と思われる.

A 型の場合, Starkey's rule によって岩堀-Hecke 環の指標値は対称群のデータのみから得ることができる. それを用いれば, 定理の直接証明が得られる. B 型の場合, [3] で与えられた Markov トレースを既約指標の一次結合で表したときの係数, つまりウェイトが既に [6] で与えられている. よって定理の中で与えたトレース関数のウェイトとそれとが一致することを確かめることによって証明が得られる. D 型も同様にウェイトが等しくなることをチェックすることによって証明が得られる. ただ, 証明は圧倒的に D 型の方が難しい. B 型の場合, $P_\chi(q,r)/Fdeg_\chi$ が各ファミリーにおいて一定の値を取る ([5] 参照). しかし, D 型の場合はそれが一定にはならないので, Fourier 変換を施したときの計算が大変である. 例外型は岩堀-Hecke 環の計算ができる CHEVIE[1] を使って結果を得ることができる. 条件 (M2) において h は $T_w(w \in W_{S\setminus\{s\}})$ をすべて動かせば良いが, τ がトレース関数であることから, 共役を取る操作によって w はある程度長さの短い元達のみを動かせば良いことがわかる. ただ, 各共役類の最短元のみ動けば良いというわけにはいかない.

以上のようにして証明は得られたが, その後 F. Digne と J. Michel から次のような指摘を受けた. 定理の中で構成したトレース関数であるが, 次の記号を使ってすっきり表すことができる. $\chi \in \mathrm{Irr}W$ に対して $\widehat{\chi} := \sum_{\chi' \in \mathrm{Irr}W} \{\chi, \chi'\}\chi'$ と定め, $\widehat{\ }$ を W の類関数全体へ線型に拡張する. 同様に自然な全単射 $I_q : \mathrm{Irr}W \to \mathrm{Irr}\mathcal{H}_S$ $(\chi \mapsto \chi_q)$ も W の類関数全体へ線型に拡張する. Fourier 変換が類関数の通常の内積に関して自己双対であることから, 定理の τ は

$$\tau = \left(\frac{1-q}{1+r}\right)^n I_q(\widehat{\mathrm{Tr}_{S\otimes L}})$$

と表されることがわかる. また, Fourier 変換が放物型部分群への制限と可換であることから, 定理の (M1) と (ii) が得られる. さらに彼らは Coxeter 元 $w = s_1 s_2 \cdots s_n$ に対応する岩堀-Hecke 環の元 T_w の指標値の性質を用いて

(M3) Coxeter 元 w に対して $\tau(T_w) = z^n$

を示した. (M1), (M2) から (M3) が得られることは明らかであるが, 実は A 型のときは, (M3) から (M2) が導かれることがわかる. しかし他の型の場合にはそうはならない. 興味ある方は是非とも (M2) の一般的な証明に挑戦して頂きたい.

5 巡回 Hecke 環

岩堀-Hecke 環に対して存在するものなら, 巡回 Hecke 環に対しても適当な類似物が存在するのではないかと思うのは自然なことである. 実際, 巡回 Hecke 環の 1 つである有木-小池環上には, Lambropoulou[8] によって適当な条件をみたすトレース関数として Markov トレースが構成されている.

ここでは有木-小池環上に前の節と同様の方法でトレース関数を構成してみる. 有木-小池環 $\mathcal{H}(e,1,n)$ は $\{T_0,T_1,\ldots,T_{n-1}\}$ を生成元とし, B_n 型の組ひも関係式と

$$(T_0-q)(T_0^{e-1}+\cdots+T_0+1)=0,$$
$$(T_i-q)(T_i+1)=0, \quad i=1,2,\ldots,n-1$$

で定義される多元環である. $\mathcal{H}(e,1,n)$ における Fourier 変換は Malle[10] によって既に与えられている. そこで $\mathcal{H}(e,1,n)$ 上のトレース関数を

$$\tau=\left(\frac{1-q}{1+r}\right)^n I_q(\widehat{\mathrm{Tr}_{S\otimes L}})$$

で定める.

定理 5.1. *τ は Lambropoulou[8] によって与えられた $\mathcal{H}(e,1,n)$ の Markov トレースを次のように特殊化したものに一致する.*

- $\tau(T_i)=z=\dfrac{(q-1)r}{1+r}, \quad i=0,1,\ldots,n-1.$
- $\tau(T_0^j)=q^{j-1}z, \quad j=1,2,\ldots,e-1.$

ちなみに, [8] の Markov トレースは $\tau(T_1)=\tau(T_2)=\cdots=\tau(T_{n-1})$ と $\tau(T_0^j)$ $(j=1,2,\ldots,e-1)$ の e 個のパラメータを持つトレース関数として構成されている.

定理の証明は B 型の場合と同様である. [8] で構成された Markov トレースのウェイトは [2] で与えられているので, それが τ のウェイトと一致することを確かめれば良い.

ここまでの状況を見ていると, 全ての巡回 Hecke 環上に Markov トレースが構成できる気がしてくる. 実際, Fourier 変換が定められるいくつかのプリミティブな複素鏡映群に対応する巡回 Hecke 環に対しても, 上と同様の方法でトレース関数を構成したところ, Markov 条件をみたしていることが確かめられた. ただ, 全ての巡回 Hecke 環に Fourier 変換が定義されているわけではないし, これから定義されるかどうかも分からないので,

同様の方法で全ての場合に Markov トレースが定義できるかどうかはわからない. また巡回 Hecke 環の場合, 生成元と基本関係が岩堀-Hecke 環の場合のように標準的な方法があって決められるわけではないので, Markov トレースの特徴付けが, (M2) のように生成元の取り方に依存しているのはどうかと思う. 巡回 Hecke 環の Markov トレースは生成元の取り方によらない形で定義されるべきであろう.

参考文献

[1] M. Geck, G. Hiß, F. Lübeck, G. Malle, G. Pfeiffer, *CHEVIE - A system for computing and processing generic character tables*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **7** (1996), 175-210.

[2] M. Geck, L. Iancu and G. Malle, *Weights of Markov traces and generic degrees*, Indag. Math. (N.S) **11** (2000), 379-397.

[3] M. Geck and S. Lambropoulou, *Markov traces and knot invariants related to Iwahori-Hecke algebras of type B*, J. reine angew. Math. **482** (1997), 191-213.

[4] Y. Gomi, *The Markov traces and the Fourier transforms*, to appear in J. Algebra.

[5] A. Gyoja, K. Nishiyama and H. Shimura, *Invariants for representation of Weyl groups and two-sided cells*, J. Math. Soc. Japan **51(1)** (1999), 1-34.

[6] L. Iancu, *Markov trace and generic degrees in type B_n*, J. Algebra **236** (2001), 731-744.

[7] V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. Math. **126** (1987), 335-388.

[8] S. Lambropoulou, *Knot theory related to generalized and cyclotomic Hecke algebras of type B*, J. Knot theory Ramifications **8** (1999), 621-658.

[9] G. Lusztig, *Characters of Reductive Groups over a Finite Field*, Ann. of Math. Study, Vol. 107. Princeton University Press, 1984.

[10] G. Malle, *Unipotente Grade imprimitiver komplexer Spiegelungsgruppen*, J. Algebra **177** (1995), 768-826.

[11] L. Solomon, *Invariants of finite reflection groups*, Nagoya Math. J. **22** (1963), 57-64.